Chương III :

TÁN SẮC VÀ HẤP THỤ

(Các hiện tượng của sự lan truyền một chiều)

I. <u>SỰ TÁN SẮC VÀ SỰ HẤP THỤ CỦA SÓNG TRÊN MỘT SỢI DÂY :</u>

1) *Dao động của một sợi dây không lý tưởng :*

Ta đã biết phương trình truyền sóng ngang dọc theo sợi dây không bị xoắn là phương trình D'Alambert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$

trong đó vận tốc truyền sóng là $c=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

với T_0 : lực căng dây

μ : khối lượng dài của dây (kg/m).

Nếu sợi dây còn chịu tác dụng của lực ma sát của môi trường không khí, xét trên một đoạn dx :

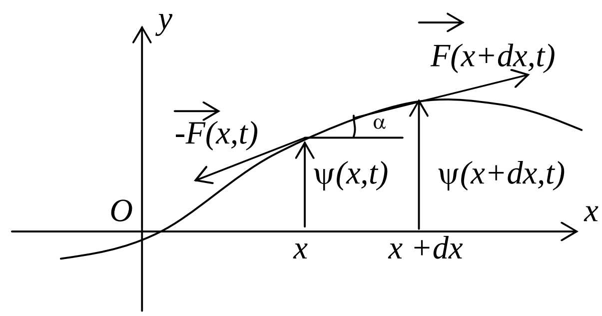
$$d\vec{f}=-\mu\frac{v}{\tau}dx\vec{e_y}=-\frac{\mu}{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{e_y}$$

⇨ Các phương trình cặp đối với F_y và ψ :

$$F_y=T_0\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\quad(*)$$



2) *Các nghiệm của phương trình truyền sóng :*

a. <u>Giải tích điều hoà :</u>

Phương trình truyền mà chúng ta vừa nhận được là tuyến tính. Một sóng vật lý có thể phân tích thành tổ hợp các sóng OPPM. Một sóng như vậy là nghiệm của phương trình truyền sóng, phương trình vi phân truyến tính với các hệ số là hằng số, nếu mỗi thành phân đơn sắc là nghiệm của phương trình.

Để đơn giản hoá bài toán, ta sẽ tìm các nghiệm "sóng đơn sắc" dưới dạng biểu diễn phức.

b. <u>Số sóng phức :</u>

Tìm nghiệm dạng sin với biên độ phức $\underline{\psi}$ tỉ lệ với $e^{j\omega t}$ của phương trình :

$$\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2}=0$$

Với $\underline{\psi}(x,t)=\underline{\varphi}(x)e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow -c^2\frac{\partial^2\underline{\varphi}(x)}{\partial x^2}+\left(-\omega^2+\frac{j\omega}{\tau}\right)\underline{\varphi}(x)=0$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$$\underline{\varphi}(x) = \underline{\varphi}_{+}\, e^{jkx} + \underline{\varphi}_{-}\, e^{jkx}$$

với hệ số k là số sóng phức, liên hệ với tần số ω bởi biểu thức quan hệ tán sắc :

$$c^2k^2 = \omega^2 - \frac{j\omega}{\tau}$$

$\underline{k}(\omega)=k_1(\omega) - jk_2(\omega)$ với $k_1^2 - k_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ và $2k_1k_2 = \dfrac{\omega}{c^2\tau}$

c. *Sự tán sắc (dispersion) :*

k phức :

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{-k_2x} e^{j(\omega t - k_1x)}$$

ở dạng thực :

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{-k_2x}\cos(\omega t - k_1x) \quad \text{(giả sử } \underline{\psi}_o = \psi_o\text{)}$$

Sự truyền pha của sóng trong số hạng $cos(\omega t - k_1x)$.

Vận tốc truyền pha - vận tốc pha $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}$ phụ thuộc vào ω.

Các sóng với tần số khác nhau truyền với vận tốc khác nhau ⇨ **hiện tượng tán sắc.**

d. *Sự hấp thu :*

e^{-k_2x}: biên độ sóng thay đổi ở trong môi trường.

Đối với sợi dây rung, từ quan hệ tán sắc ta có :

$$k_1k_2 = -\frac{1}{2}Im(\underline{k}^2) = \frac{\omega^2}{2c^2\tau} > 0$$

Nếu sóng truyền theo chiều x dương ($k_1 > 0$) ⇒ $k_2 > 0$ ⇨ có sự suy giảm dọc theo chiều truyền sóng. Sóng bị mất năng lượng khi đi vào môi trường, đó là **sự hấp thu**.

Chiều dài xuyên sâu $\delta = \dfrac{1}{k_2} = -\dfrac{1}{Im(\underline{k})}$

II. SỰ TRUYỀN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG VẬT DẪN KIM LOẠI :

1) *Chuyển động của chất lỏng hạt mang điện (điện tích) tự do :*

a. *Môi trường kim loại :*

Sự dẫn điện của kim loại gắn liền với sự tồn tại của các điện tử chuyển động trong vật liệu. Mật độ hạt cao (~$10^{29}m^{-3}$ đối với một chất dẫn điện tốt). Tương tác của các điện tích chuyển động với mạng tinh thể kim loại làm mất năng lượng điện từ. Sự mất mát đó có thể xem như tồn tại lực cản nhớt :

$\vec{f} = -m\dfrac{\vec{v}}{\tau}$ với τ là thời gian hồi tĩnh của vật liệu (~ 10^{-14}s).

Phương trình chuyển động của điện tử trong vật dẫn :

$$m\vec{a} = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

b. *Sự gần đúng của môi trường liên tục :*

$\vec{v}$: vận tốc trung bình của một tập hợp các hạt mang điện chuyển động.

Mô hình chất lỏng các hạt mang điện, trường vận tốc $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$.

Gia tốc trung bình của điện tử :

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \lim_{dt\to 0}\left[\frac{\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}dt,t+dt)-\vec{v}(\vec{r},t)}{dt}\right] = \frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}(\vec{r},t)$$

Phương trình chuyển động :

$$m\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -e(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

c. Gần đúng tuyến tính :

Biên độ của điện trường giả sử đủ nhỏ sao cho biên độ chuyển động của các điện tích ξ nhỏ so với bước sóng của sóng điện từ λ.

$$\frac{(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}{\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right|} \approx \left|\frac{kv^2}{\omega v}\right| \approx \left|\frac{kv}{\omega}\right| \approx \frac{\xi}{\lambda} << 1$$

Đối với từ trường $\quad \frac{|\vec{v}\wedge\vec{B}|}{|\vec{E}|} \approx \frac{\left|v\frac{kE}{\omega}\right|}{|E|} \approx \left|\frac{kv}{\omega}\right| \approx \frac{\xi}{\lambda} << 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

d. Sóng ngang :

Điện trường của sóng điện từ phẳng dạng sin truyền trong môi trường là sóng ngang.

Ví dụ : Đối với sóng phẳng, $div\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$.

Mật độ dòng điện được sinh ra do chuyển động của điện tử : $\vec{j} = -ne\vec{v}$

với n = const : mật độ điện tử đồng nhất trong môi trường.

Các phương trình Maxwell :

$$div\vec{E} = 0 \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

2) *Quan hệ tán sắc của sóng ngang OPPM :*

Tìm các nghiệm OPP dạng sin, tần số ω, vectơ sóng phức $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{e_x}$

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t-\underline{k}x)} .$$

a. *Độ dẫn điện của kim loại :*

Vectơ vận tốc được xác định bởi phương trình chuyển động :

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{\frac{e}{m}}{j\omega + \frac{1}{\omega}}\underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

Mật độ dòng điện có dạng $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$

Điện dẫn phức : $\underline{\gamma}(j\omega) = \dfrac{\gamma_0}{1 + j\omega t}$

với $\gamma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$ là điện dẫn của kim loại ở chế độ tĩnh.

b. *Quan hệ tán sắc :*

Đối với sóng ngang, $div\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow rot(rot\underline{\vec{E}}) = -\Delta\underline{\vec{E}} = \underline{k}^2\underline{\vec{E}}$$

Mặt khác :

$$rot(rot\underline{\vec{E}}) = rot\left(-\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\omega_0\underline{\gamma}\omega - \underline{k}^2\right)\underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Rightarrow c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - j\frac{\gamma\omega}{\varepsilon_0}$$

c. *Các trường hợp giới hạn :*

$\underline{k} = k_1 - jk_2$

$$c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - j\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\frac{\omega}{1 + j\omega t} = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{1}{j\omega t}} \quad \text{với } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

- $\omega << \dfrac{1}{\tau} \approx 10^{14}s^{-1}$: k_1 và k_2 gần bằng nhau.
- $\dfrac{1}{\tau} << \omega << \omega_p \approx 10^{16}s^{-1}$: $k_2 >> k_1$: số sóng thuần ảo.
- $\omega >> \omega_p$, $k_1 >> k_2$: số sóng thực

	Sóng vô tuyến,..... Microwaves $\omega << \frac{1}{\tau} << \omega_p$	Hồng ngoại,...., Tử ngoại $\frac{1}{\tau} << \omega < \omega_p$	Tử ngoại xa, tia X $\frac{1}{\tau} << \omega_p < \omega$
Quan hệ tán sắc	$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$	$\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$	
Số sóng ($k_1 > 0$)	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}(1 - j)$	$\underline{k} = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

d. *Hiệu ứng bề mặt (Skin effect) ở tần số thấp* ($\omega << \frac{1}{\tau}$):

Điện dẫn $\underline{\gamma} = \gamma_0$ thực và dương.

Số sóng có dạng tiệm cận $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega = \mu_0\gamma_0\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Đối với sóng truyền theo chiều dương của trục x :

$$\underline{k} = \sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{với } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$$

Điện trường của sóng liên tiếp trong kim loại có dạng :

$$\vec{\underline{E}}(x,t) = \vec{\underline{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$\vec{\underline{B}}(x,t) = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}(x,t)}{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} \vec{e_x} \wedge \vec{\underline{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})}$$

⇨ Sóng có $\vec{E}$ và $\vec{B}$ không cùng pha.

Đối với sóng met (m) hoặc centimet (cm), sóng điện từ hầu như không được truyền vào trong kim loại mà định xứ trên một lớp mỏng bề mặt. Độ xuyên sâu rất nhỏ, tại đó trường điện từ gần như bằng không, gọi là **bề dày của da.**

e. *Sự lan truyền ở tần số cao (.....):*

- Hiệu ứng va chạm được bỏ qua:

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| >> \left|\frac{\vec{v}}{\tau}\right| \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$\vec{v}$ và $\vec{E}$ lệch pha 90^o. Công suất truyền cho điện tích bằng không.

- Trong vùng $\frac{1}{\tau} << \omega < \omega_p$: $c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - \omega_p^2$, gương kim loại:

Nếu $\omega<\omega_p$, số sóng thuần ảo. Đối với sự truyền theo x tăng :

$$\underline{k} = -jk_2 = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

$$\vec{\underline{E}}(x,t) = \vec{\underline{E}}_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t}$$

$$\vec{\underline{B}}(x,t) = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}(x,t)}{\omega} = k_2 \vec{e_x} \wedge \vec{\underline{E}}_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Ta có sóng dừng với biên độ giảm theo hàm mũ exp : **sóng tiêu tán**.

$\vec{E}$ và $\vec{B}$ lệch pha nhau 90^o. Giá trị trung bình của vectơ Poynting và dòng năng lượng truyền bởi sóng bằng không ⇨ **sóng phản xạ**.

$$10^{14} << \omega < 10^{16}\text{ Hz} \Rightarrow 0.03\mu\mu < \lambda << 3\mu\text{m}.$$

- Vùng trong suốt $\frac{1}{\tau} << \omega_p < \omega$:

Số sóng thực $\underline{k} = k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ (quan hệ tán sắc Klein-Gordon).

Sóng truyền trong môi trường không bị suy giảm : **kim loại trong suốt**.

Vận tốc pha : $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

III. BÓ SÓNG :

Trong phần tiếp theo, ta bỏ qua sự hấp thụ, lúc đó số sóng k là số thực.

1) *Sóng định xứ :*

- *Sự chồng chất hai sóng đơn sắc:*

Khảo sát hai sóng đơn sắc có cùng biên độ, đồng pha tại x = 0 và t = 0, có tần số ω_1 và ω_2 (với $\omega_1 > \omega_2$).

Hàm sóng của sự chồng chất hai sóng dưới dạng thực :

$$\psi(x,t) = \psi_0 cos(\omega_1 t - k_1 x) + \psi_0(\omega_2 t - k_2 x)$$

với $k_1 = k_1(\omega_1)$ và $k_2 = k_2(\omega_2)$ là các quan hệ tán sắc.

Giả sử ω_1 và ω_2 rất gần nhau.

Đặt :

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{và} \quad \delta\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} << \omega_m$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} = k(\omega_m) \quad \text{và} \quad \delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = [2\psi_0 cos(\delta\omega t - \delta k x)]cos(\omega_m t - k_m x)$$

$$= \psi_m(x,t)cos(\omega_m t - k_m x).$$

⇨ **Hiện tượng phách** : biên độ của sóng dao động với tần số không gian k_m, bị điều biến chậm với tần số δk.

- ✓ Tín hiệu "nhanh" $cos(\omega_m t - k_m x)$ lan truyền với vận tốc pha $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$
- ✓ Đường bao của tín hiệu lan truyền với vận tốc $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$, gọi là vận tốc nhóm.

* Tổng của hai sóng dạng sin với các tần số gần nhau là một tín hiệu với tần số trung bình và biên độ biến đổi chậm: Chúng ta có thể nói rằng sóng tổng hợp chủ yếu <u>định xứ</u> ở lân cận của bụng của đường bao biên độ.

Bằng cách chồng chất một số lớn các sóng OPPM, ta có thể làm <u>giảm</u> sự trải rộng của đường bao tính hiệu.

Đối với một bó 2N+1 sóng phẳng hình sin, có tần số ω_n lân cận ω_m :

$$\omega_n = \omega_m + n\delta\omega \quad (-N \le n \le N)$$

Độ rộng phổ : $\Delta\omega = (2N + 1)\delta\omega$

thoả điều kiện : $\Delta\omega << \omega_m$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-N}^{N} A_0 \cos(\omega_n t - k_n x) \ ; \ k_n = k(\omega_n).$$

⇨ Độ trải rộng của bó sóng càng giảm yếu nếu số lượng sóng chồng chất cũng như độ rộng phổ$\Delta\omega$ càng lớn.

Sự điều khiển biên độ có chu kỳ (theo thời gian) $T = \frac{2\pi}{\delta\omega}$

- Một bó sóng định xứ trong thời gian và không gian là sự chồng chất của các sóng OPPM có <u>phân bố tần số liên tục</u>.

Biểu diễn dưới dạng phức :

$$\underline{\psi}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega \qquad \text{với } k = k(\omega).$$

Biểu diễn dưới dạng thực :

$$\psi(x,t)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega t-kx)d\omega \quad \text{(giả sử } \underline{A}=a\text{).}$$

Độ rộng phổ của sóng tổng hợp $\Delta\omega$ liên hệ với khoảng thời gian tồn tại của sóng Δt :

$$\Delta t\,\Delta\omega \approx 1$$

2) *Sự lan truyền sóng có (hoặc không có) tán sắc :*

Nếu tất cả các sóng OPPM của bó sóng lan truyền với cùng vận tốc pha $v_\varphi = c$ (nếu là nghiệm của phương trình D'Alambert): <u>sự lan truyền không tán sắc</u>. Bó sóng lan truyền cũng với vận tốc c. Trạng thái của bó sóng vào hai thời điểm khác nhau t_1 và t_2 là như nhau, với sự chuyển dịch $v_\varphi (t_2 - t_1)$.

Nếu các OPPM của bó sóng lan truyền với các vận tốc pha khác nhau: <u>sự lan truyền tán sắc</u>. Bó sóng bị biến dạng trong quá trình lan truyền.

3) *Vận tốc nhóm :*

Khảo sát bó sóng với phổ liên tục :

$$\underline{\psi}(x,t)=\int_0^\infty \underline{A}(\omega)e^{j(\omega t-kx)}d\omega$$

Trường hợp $\Delta\omega$ rất nhỏ so vớiω_m :

$$k \approx k_m + \frac{\delta\omega}{v_g} \qquad \text{với} \begin{cases} \delta\omega = \omega-\omega_m \\ v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m} \end{cases}$$

$$\underline{\psi}(x,t)=\left[\int_{\Delta\omega}\underline{A}(\omega)e^{i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v_g}\right)}d(\delta\omega)\right]e^{i(\omega_m t-k_m x)}$$

⇨ Sóng "trung bình" với tần số ω_m , biên độ bị điều biến bởi sóng hạng $\underline{F}$ lan truyền với vận tốc v_g :

$$\underline{\psi}(x,t)\approx \underline{F}\left(t-\frac{x}{v_g}\right)e^{i(\omega_m t-k_m x)}$$

Một bó sóng, với độ rộng phổ nhỏ quanh giá trị ω_m , dịch chuyển trong môi trường có sự tán sắc yếu, với vận tốc nhóm $v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m}$

Vận tốc nhóm $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ là vận tốc truyền thông tin.

Năng lượng của sóng được định xứ trong bó sóng: bó năng lượng lan truyền với vận tốc nhóm.